



SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

SEMESTRAL
UNI



Álgebra

Tema: Números complejos I

Docente: Segundo Heli Chiroque Reyes

academiacesarvallejo.edu.pe

UNIDAD IMAGINARIA

Se denota por i y se define:

$$i = \sqrt{-1}$$

Donde : $i^2 = -1$

Potencias enteras de la unidad imaginaria

Se define: $i^0 = 1$ $i^1 = i$

$i^1 = i$	$i^5 = i$	$i^9 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{11} = -i$
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{12} = 1$

Se observa que $i^n \in \{-1; 1; -i; i\}, \forall n \in \mathbb{Z}_0^+$

PROPIEDADES

① $i^{4k} = 1 ; \forall k \in \mathbb{Z}$

Ejemplos:

$$\diamond i^{84} = i^{4 \cdot 21} = 1$$

$$\diamond i^{2036} = i^{20\mathbf{36}} = 1$$

$$\diamond i^{-64} = 1$$

② $i^{4k+n} = i^n ; \forall k, n \in \mathbb{Z}$

Ejemplos

$$\diamond i^{1747} = i^{4 \cdot 436 + 3} = i^3 = -i$$

$$\diamond i^{3694} = i^{4 \cdot 923 + 2} = i^2 = -1$$

$$\diamond i^{-35} = i^{-36+1} = i^1 = i$$

$$\textcircled{3} \quad i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{4k} = 0; \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo:

$$\diamond i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{40} = 0$$

Ejemplo: Calcule el valor de S.

$$S = i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2023}$$

$$\textcircled{4} \quad i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = 0; \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos:

$$\diamond i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{20} = 0$$

$$\diamond i^{-22} + i^{-23} + i^{-24} + i^{-25} = 0$$

Aplicación

Determine el valor de

$$S = i^{13} + i^{-14} + i^{15} + i^{-16} + \dots + i^{63}$$

A) 1 B) i C) -1 D) 1 + i E) -i

Resolución

DEFINICIÓN (Número complejo)

Un número complejo z es un par ordenado $(a; b)$ de números reales, es decir:

$$z = (a; b) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

FORMA BINÓMICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

$$z = (a; b) = a + bi \quad a, b \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$$

Donde: a : Parte real de z ($a = \text{Re}(z)$)

b : Parte imaginaria de z ($b = \text{Im}(z)$)

Observación

El conjunto de los números complejos, se denota por:

$$\mathbb{C} = \{a + bi / a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

Ejemplo

$$\text{Si } z = \sqrt{3} - 4i \Rightarrow \text{Re}(z) = \sqrt{3} \quad \wedge \quad \text{Im}(z) = -4$$

IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS

Sean: $a; b; m; n \in \mathbb{R}$

$$a + bi = m + ni \leftrightarrow a = m \wedge b = n$$


Aplicación

Halle los números complejos $(x; y)$ que satisfacen la ecuación: $x^3 - 1 + 3i = 26 + (y^2 - 1)i$

Resolución

TIPOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$,

1) z es un número complejo real si y solo si

$$\text{Im}(z) = b = 0 \quad \wedge \quad a \neq 0$$

2) z es un número complejo imaginario puro si y solo si

$$\text{Re}(z) = a = 0 \quad \wedge \quad b \neq 0$$

3) z es un número complejo nulo si y solo si

$$a = b = 0$$

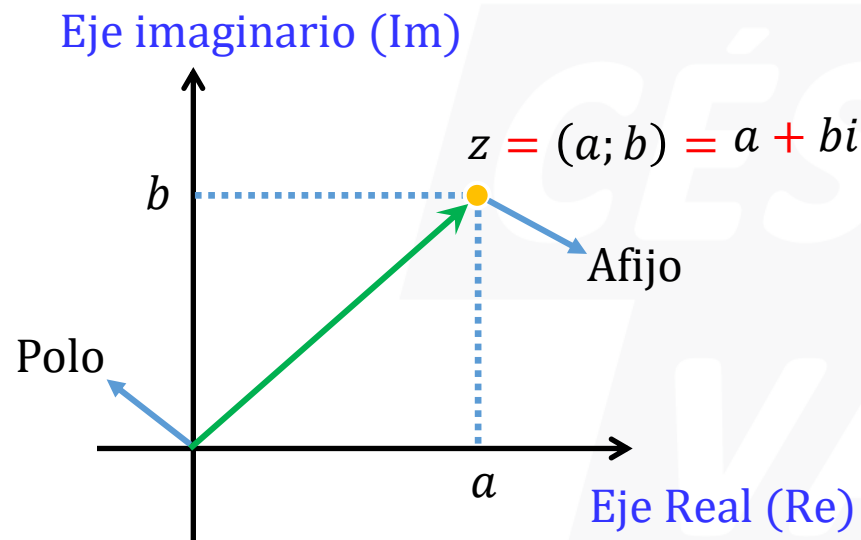
Aplicación

Sea $x \in \mathbb{R}$. Halle los valores de x si $(x + 2i)^3$ es un complejo imaginario puro.

Resolución

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea $z = (a; b) = a + bi \in \mathbb{C}$, donde $a > 0, b > 0$, su representación gráfica es



DEFINICIONES

Sea el complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se define

- Conjugado de z como $\bar{z} = a - bi$

- Opuesto de z como

$$z^* = -a - bi$$

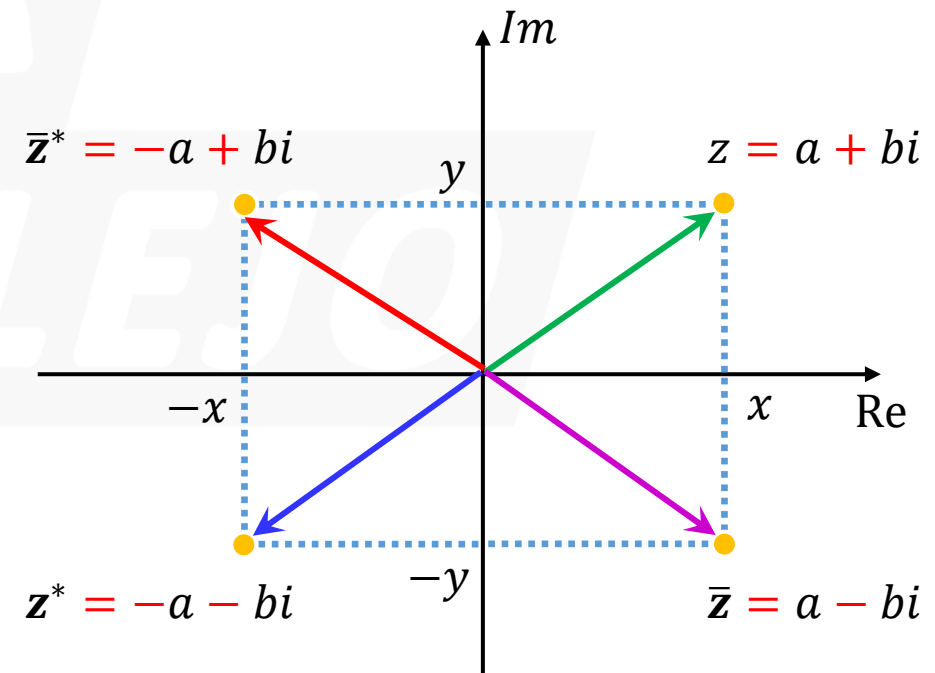
Ejemplo

Si $z = 20 - 22i \Rightarrow$

$$\bar{z} = 20 + 22i$$

$$z^* = -20 + 22i$$

Representación geométrica de $z = a + bi$, $\bar{z}$, z^* , $\bar{z}^*$



OPERACIONES EN $\mathbb{C}$

Sean los números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = m + ni$; se definen las siguientes operaciones:

Adición y sustracción

$$z_1 + z_2 = (a + m) + (b + n)i$$

$$z_1 - z_2 = (a - m) + (b - n)i$$

Multiplicación

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (m + ni)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (am - bn) + (an + bm)i$$

División

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{(a + bi)(m - ni)}{(m + ni)(m - ni)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{am + bn}{m^2 + n^2} + \frac{bm - an}{m^2 + n^2}i$$

Ejemplos:

Sean $z_1 = 3 + 7i$ y $z_2 = 5 + 2i$

$$\diamond z_1 + z_2 =$$

$$\diamond z_1 - z_2 =$$

$$\diamond z_1 \cdot z_2 =$$

$$\diamond \frac{z_1}{z_2} =$$

Resultados notables

$(1 + i)^2 = 2i$	$(1 + i)^4 = -4$	$\frac{1 + i}{1 - i} = i$
$(1 - i)^2 = -2i$	$(1 - i)^4 = -4$	$\frac{1 - i}{1 + i} = -i$

Observación

Sea: $z = \frac{a + bi}{m + ni}$

▪ z es un **complejo real** si: $an = bm$

▪ z es un **complejo imaginario puro** si:

$$am + bn = 0$$

Aplicación

Si el número complejo $w = \frac{a+3\lambda i}{12+a\lambda i}$, $\lambda \neq 0$ representa un número real, determine el menor valor de $2a - 1$.

A) 11 B) - 11 C) - 13 D) 12 E) 10

Resolución

PROPIEDADES DEL CONJUGADO

Dados $z, w \in \mathbb{C}$.

- $z = \bar{z} \iff z$ es un complejo real
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, w \neq 0$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
- $\overline{\sqrt[n]{z}} = \sqrt[n]{\bar{z}}$

Aplicación

Cuántos números complejos z satisfacen la siguiente igualdad

$$\bar{z}^2 = 4z$$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Resolución

Aplicación

Dada la ecuación en el plano complejo

$$z \cdot \bar{z} - 2\operatorname{Re}(\bar{w}z) + w \cdot \bar{w} = \rho^2$$

determine la ecuación cartesiana.

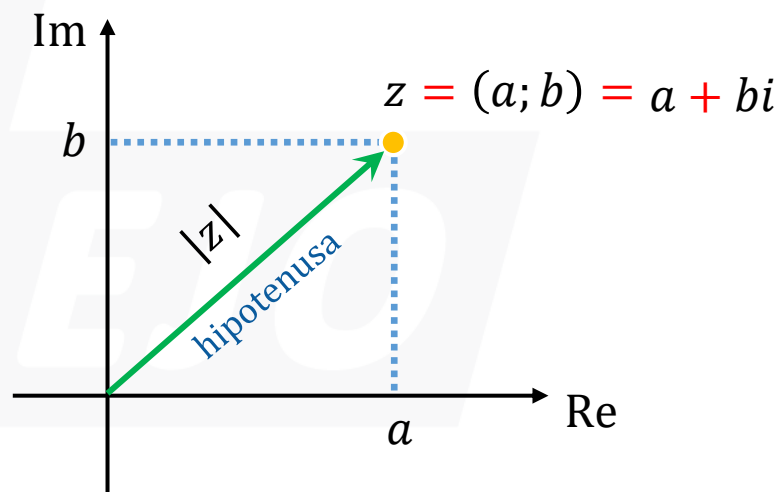
Resolución

MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, el módulo o valor absoluto de z es un número real no negativo denotado por $|z|$ y se define como:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Geométricamente, es la distancia del polo al afijo



Ejemplo

$$\bullet \quad z = 3 + \sqrt{2}i \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{11}$$

PROPIEDADES DEL MÓDULO

1) $ z \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$	5) $\left \frac{z}{w} \right = \frac{ z }{ w }, w \neq 0$
2) $ z = \bar{z} = z^* $	
3) $ z ^2 = z \cdot \bar{z}$	6) $ z^n = z ^n$
4) $ z \cdot w = z w $	7) $ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{ z }$

Ejemplos

- $|1 + 2i| = |1 - 2i| = |-1 - 2i| = \sqrt{5}$
- $(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) = |1 + \sqrt{3}i|^2 = 2^2$
- $|(-4 + 3i)(1 - i)| = |-4 + 3i| |1 - i| = 5\sqrt{2}$

Aplicación

Sea $z \in \mathbb{C}$, tal que

$$|z| + \bar{z} = 2z^* + \sqrt{72}i$$

Determine z .

A) $2 + \sqrt{3}i$

B) $-2 + \sqrt{2}i$

C) $-1 + 2\sqrt{2}i$

D) $1 + \sqrt{3}i$

E) $-2 + 2\sqrt{2}i$

Resolución

Aplicación

Halle $|z|$ si $z = \frac{\sqrt{1 + 2\sqrt{2}i}(1 + \sqrt{3}i)^2}{1 + i}$

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) 2

Resolución**Aplicación**

Determine la gráfica que mejor representa

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = 1 \right\}$$

Resolución

— ACADEMIA —

CÉSAR

VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:   

academiacesarvallejo.edu.pe